第４講　回転体の体積

4　［A］　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ に対して $C：y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ とする．第１象限の C の変曲点を P とし，P における C の接線を l，l と y 軸との交点を Q とする．また線分 PQ と C と y 軸によって囲まれた部分を D とする．

D を y 軸まわりに回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

［B］　$(x,\ y)=(\cos^3\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で定められる曲線を C とする．

C と x 軸と y 軸で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

第４講　回転体の体積

4　［A］　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ に対して $C: y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ とする．第１象限の C の変曲点をＰとし，Ｐにおける C の接線を l，l と y 軸との交点をＱとする．また線分 PQ と C と y 軸によって囲まれた部分を D とする．

D を y 軸まわりに回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

［B］　$(x,\ y)=(\cos^3\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で定められる曲線を C とする．

C と x 軸と y 軸で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

【答】　［A］　$V_1=8\pi\left(\dfrac{5}{3\sqrt{e}}-1\right)$　　［B］　$V_2=\dfrac{2}{5}\pi$

【解説】　［A］　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}$ より $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{8}}\left(-\dfrac{x^2}{8}\right)'=-\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}$ となる．

また $f''(x)=-\dfrac{1}{4}\left\{(x)'e^{-\frac{x^2}{8}}+x\left(e^{-\frac{x^2}{8}}\right)'\right\}=-\dfrac{1}{4}\left\{1\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}+x\left(-\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x^2}{8}}\right)\right\}=\dfrac{1}{16}(x^2-4)e^{-\frac{x^2}{8}}$

となり，$x\geqq 0$ の範囲で $x=2$ を境に $f''(x)$ の符号は負から正に変化するので，変曲点の x 座標は 2．よって $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ である．

また $f'(2)=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ より l の方程式は $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}(x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ つまり

$y=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ となる．

よって

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 2^2\pi\times\frac{1}{\sqrt{e}}\times\frac{1}{3}-\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\pi x^2dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}-\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\pi(-8\log y)dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1}\log y\,dy \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\Big[y\log y-y\Big]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{e}}+8\pi\left(-1+\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)=8\pi\left(\frac{5}{3\sqrt{e}}-1\right)
\end{aligned}
$$

［B］　$x=\cos^3\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(-\sin\theta)$ なので $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dx}{d\theta}<0$ であり，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=\sin\theta>0$ なので

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^1 \pi y^2\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi(\sin\theta)^2\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta)\,d\theta \\ &= 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta \end{aligned}$$

ここで1［B］(2)の結果より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{15}$ なので $V_2=3\pi\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{2}{5}\pi.$